Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2022 届高三第一次联考

数学参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	**C**	**C**	**D**	**A**	**D**	**C**	**D**	**B**	**B**

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11．3；$\dfrac{9\pi-9\sqrt{3}}{2}$

12．18；$(0,1]$

13．-4；31

14．$\dfrac{\pi}{3}$；$3\sqrt{3}$

15．16

16．$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

17．0

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18．解：

（1）由正弦定理得 $\sin A\sin B=-\sqrt{3}\sin B\cos A$ …………………3 分

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A=-\sqrt{3}\cos A$，

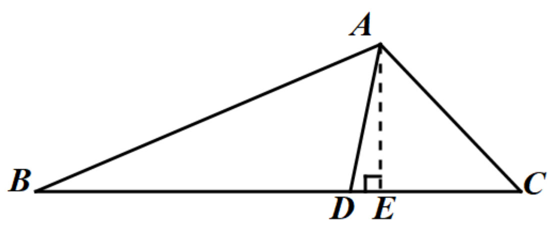
所以 $\tan A=-\sqrt{3}$ ……………5 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$． …………………7 分

（2）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $28=4+c^2-4c\cos120^\circ$，$\therefore c=4$ ………………9 分

由角平分线性质知：$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{a}=2$，所以 $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{2}{3}$ …………………11 分

过 A 做 AE 垂直 BC 于 E 点，



则 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AE\cdot BD, S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AE\cdot BC$

所以 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ …………………14 分

19．解：

（1）连接OB，$\because PA=PC$，O为AC中点，$\therefore PO\perp AC$；…………………3 分

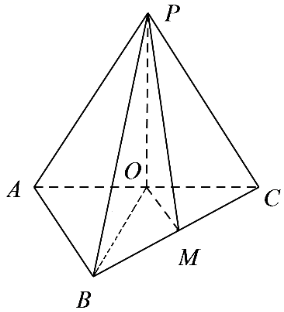
$PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，又 $AB=BC=2\sqrt{2},AC=4$，则 $AB^2+CB^2=AC^2$，

$\therefore AB\perp BC$，……………5 分

所以$OB=\frac{1}{2}AC=2$，而$PB=4$，则 $PB^2=BO^2+OP^2$，所以$PO\perp OB$.

又$AC\cap OB=O$，所以 $PO\perp$平面ABC…………………7 分

（2）由（1） $PO\perp$平面ABC，可得$PO\perp CB$，又M 是BC中点，



$\therefore OM//AB$，而$AB\perp BC$，$\therefore OM\perp CB$，又$OM\cap PO=O$，所以 $CB\perp$平面POM，

所以$\angle CPM$ 就是PC与平面POM所成的角…………………11 分.

在直角三角形PMC中，$CM=\frac{1}{2}CB=\sqrt{2}$，所以

$\sin\angle CPM=\frac{CM}{PC}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故PC与平面POM所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$．…………………15 分

20．解：

（1）设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，

因为$a_1=2$，$b_1=1$，$a_2=b_4$，且a_2是b_2和b_8的等比中项，

所以$(1+3d)^2=(1+d)(1+7d)$，解得$\begin{cases}d=1\\q=2\end{cases}$或$\begin{cases}d=0\\q=\frac{1}{2}\end{cases}$（舍）…………3 分

所以$a_n=2^n$，$b_n=n$　　…………………6 分

（2）因为$T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$ ①

$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+n\times 2^{n+1}$ ②

②-①得

$T_n=-2^1-2^2-2^3-\cdots-2^n+n\times 2^{n+1}=-\frac{2(1-2^n)}{1-2}+n\times 2^{n+1}=2+(n-1)\times 2^{n+1}$ ……10 分

因为$(-1)^n\lambda-T_n<0$，即$(-1)^n\lambda<T_n$对$n\in N^*$恒成立，所以$(-1)^n\lambda<2+(n-1)\times 2^{n+1}$

当n为偶数时，$\lambda<2+(n-1)\times 2^{n+1}$，所以$\lambda<\left[2+(n-1)\times 2^{n+1}\right]_{\min}=10$

当n为奇数时，$-\lambda<2+(n-1)\times 2^{n+1}$，所以$-\lambda<\left[2+(n-1)\times 2^{n+1}\right]_{\min}=2$，即$\lambda>-2$

综上可得$-2<\lambda<10$　　　…………………15 分

21．解：

（1）设 $B\left(x_1, y_1\right)$ 由 F 是 ΔAOB 的重心，$F\left(1,0\right)$ 得 $x_0+x_1=3x_F=3$，

$y_0+y_1=3y_F=0$ ……………3 分

即 $y_0=-y_1, x_0=x_1=\frac{3}{2}x_F=\frac{3}{2}$，

因为 $y_0>0$，得 $y_0=\sqrt{6}$ …………………6 分

（2）因为 M 为弦 OA 的中点，即 $M\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，

所以 $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta OMF}}=\frac{2S_{\Delta MOB}}{S_{\Delta OMF}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}OM\cdot MB\cdot\sin\angle OMB}{\frac{1}{2}OM\cdot MF\cdot\sin\angle OMF}=\frac{2MB}{MF}$， …………………8 分

因为 M、B、F 三点共线，所以 $\frac{2MB}{MF}=\frac{2\left(\frac{y_0}{2}-y_1\right)}{\frac{y_0}{2}}=2-\frac{4y_1}{y_0}$.直线 MF 斜率不为 0，

故设直线 MF：$x=\frac{x_0-2}{y_0}y+1$，

由 $\begin{cases} x=\frac{x_0-2}{y_0}y+1 \\ y^2=4x \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4\frac{x_0-2}{y_0}y-4=0$ ………………10 分

得 $y_1=2\frac{x_0-2}{y_0}-2\sqrt{\left(\frac{x_0-2}{y_0}\right)^2+1}$，其中 $y_0{}^2=4x_0$，

则 $\frac{y_1}{y_0}=\frac{1}{2}-\frac{4}{y_0{}^2}-2\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{4}{y_0{}^4}}$， ………………12 分

因为 $1\le y_0\le 2$，

所以 $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta OMF}}=\frac{2MB}{MF}=2-\frac{4y_1}{y_0}=\frac{16}{y_0{}^2}+8\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{4}{y_0{}^4}}\in\left[4+2\sqrt{5},16+2\sqrt{65}\right]$………15 分

22．解：

（1）$\because f'(x)=\frac{1}{2}\left[\left(e^x-1\right)+(x-1)e^x\right]=\frac{1}{2}\left(xe^x-1\right)$…………3 分

$\therefore$ 切线方程为 $y=\frac{1}{2}\left(e-1\right)\left(x-1\right)$…………6 分

（2）由（1）得 $f'(x)=\frac{1}{2}\left(xe^x-1\right)$，又 $f'(0)=-\frac{1}{2}$，$f'(1)=\frac{1}{2}\left(e-1\right)>0$，且 $f'(x)=\frac{1}{2}\left(xe^x-1\right)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f'(x)=\frac{1}{2}\left(xe^x-1\right)$ 有唯一实根 $x_0\in(0,1)$…………8 分

当 $x\in\left(-\infty,x_0\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减；当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

故两根分别在 $\left(-\infty,x_0\right)$ 与 $\left(x_0,+\infty\right)$ 内，不妨设 $x_1<x_2$.

设 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}(e-1)(x-1)$，$x\in\left(x_0,+\infty\right)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{2}\left(xe^x-e\right)$，

当 $x\in\left(x_0,1\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，

$\therefore g(x)$ 有最小值 $g(1)=0$，即 $f(x)-\dfrac{1}{2}(e-1)(x-1)\ge 0$ 恒成立，$a=f(x_2)\ge\dfrac{1}{2}(e-1)(x_2-1)$，

$x_2\le\dfrac{2a}{e-1}+1$ ……………12 分

又因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x$，所以 $f(x)\ge-\dfrac{1}{2}x$ 恒成立，

$a=f(x_1)\ge-\dfrac{1}{2}x_1$，即 $x_1\ge-2a$

于是 $\left|x_1-x_2\right|\le\dfrac{2a}{e-1}+1+2a=\dfrac{2ea}{e-1}+1$ ………………15 分